

الصف الحادي عشر متقدم

Math Show

٣-٩ القيمة المتوقعة والتباين

القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي المنفصل (س)

ويرمز لها بالرمز $E(S)$ وتسمى أيضاً الوسط الحسابي

وتحسب من العلاقة $E(S) = \sum S \times P(S)$

التباين

ويرمز له بالرمز $E(S^2)$ ويحسب من العلاقة $E(S^2) = \sum S^2 \times P(S) - [E(S)]^2$

تطبيق التعلم: المجموعة الاولى

(١) الجدول التالي يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل (س)

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	٠,٣	٠,١٥	٠,٢	٠,٣٥

(أ) احسب القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي $E(S)$

(ب) احسب الانحراف المعياري للمتغير العشوائي $E(S)$

الحل

لحساب القيمة المتوقعة $E(S)$ اضرب كل قيمة للمتغير العشوائي $S \times$ احتمالها ثم قم بتجميع النواتج

$$E(S) = 0 \times 0,3 + 1 \times 0,15 + 2 \times 0,2 + 3 \times 0,35 = 1,6$$

$$E(S^2) = 0^2 \times 0,3 + 1^2 \times 0,15 + 2^2 \times 0,2 + 3^2 \times 0,35 = 3,65$$

$$E(S^2) = 3,65$$

$$\sigma = \sqrt{E(S^2) - [E(S)]^2} = \sqrt{3,65 - 1,6^2} = 1,04$$

$$E(S) = 1,6$$

(٢) الجدول التالي يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل (س)

س	٢	٤	٦
ل(س)	٠,٣	٠,٣	٠,٤

(أ) احسب التباين للمتغير العشوائي $E(S)$

الحل

$$E(S) = 2 \times 0,3 + 4 \times 0,3 + 6 \times 0,4 = 4,2$$

$$E(S^2) = 2^2 \times 0,3 + 4^2 \times 0,3 + 6^2 \times 0,4 = 17,6$$

$$E(S^2) = 17,6$$

الصف الحادي عشر متقدم

Math Show

٣-٩ القيمة المتوقعة والتباين

تطبيق التعلم: المجموعة الثانية

(١) الجدول التالي يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل (ص)

ص	٠	١	٢	٣	٤
ل(ص)	٠,٠٣	٠,٢	٠,٣٢	٠,٢	٠,٠٥

(أ) احسب قيمة م

(ب) احسب كل من ت(ص)، ع(ص)

الحل

$$1 = 0,03 + 0,2 + 0,32 + 0,2 + 0,05$$

$$1 = 0,4 + 0,3$$

$$0,3 = 1 - 0,4 \quad \text{بالقسمة على ٣}$$

$$0,2 = 0,3$$

$$ت(ص) = 0 \times 0,03 + 1 \times 0,2 + 2 \times 0,32 + 3 \times 0,2 + 4 \times 0,05 = 1,84$$

$$ع(ص) = 0^2 \times 0,03 + 1^2 \times 0,2 + 2^2 \times 0,32 + 3^2 \times 0,2 + 4^2 \times 0,05 = 1,8944$$

$$ع(ص) = 1,8944$$

(٢) ح متغير عشوائي حيث $\in \{1, 3, 6, 10\}$ إذا علمت أن احتمالية حدوث قيم ح متساوية،

فأوجد كل من ت(ح)، ع(ح)

الحل

احتمالية حدوث قيم ح متساوية أي كل منهم $1 \div 4 = 0,25$

ح	١	٣	٦	١٠
ل(ح)	٠,٢٥	٠,٢٥	٠,٢٥	٠,٢٥

$$ت(ح) = 1 \times 0,25 + 3 \times 0,25 + 6 \times 0,25 + 10 \times 0,25 = 5$$

$$ع(ح) = 1^2 \times 0,25 + 3^2 \times 0,25 + 6^2 \times 0,25 + 10^2 \times 0,25 = 11,5$$

$$ع(ح) = 11,5$$

٣-٩ القيمة المتوقعة والتباين

Math Show

الصف الحادي عشر متقدم

(٣) الجدول التالي يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل (ف)

ف	١	٣	٩	م
ل(ف)	٠,٤	٠,٢٨	٠,١٤	٠,١٨

إذا علمت أن $T(ف) = ٥,٣٨$ فأوجد قيمة كل من م، $E(ف)$

الحل

نستخدم علاقة القيمة المتوقعة لإيجاد قيمة المجهول م

$$٥,٣٨ = م \cdot ٠,١٨ + ٠,١٤ \times ٩ + ٠,٢٨ \times ٣ + ٠,٤ \times ١$$

$$٥,٣٨ = م \cdot ٠,١٨ + ٢,٥$$

$$٢,٨٨ = ٢,٥ - ٥,٣٨ = م \cdot ٠,١٨$$

بالقسمة على ٠,١٨

$$١٦ = ٠,١٨ \div ٢,٨٨ = م$$

$$E(س) = ٠,٤ \times ١ + ٠,٢٨ \times ٣ + ٠,١٤ \times ٩ + ٠,١٨ \times ١٦ = ٥,٣٨$$

$$E(س) = ٣١,٤$$

(٤) ر متغير عشوائي حيث $R \in \{١٠, ٢٠, ٧٠, ١٠٠\}$ إذا علمت أن ل(ر) تتناسب مع قيم ربين أن ت(ر) = ٧٧، وأوجد $E(R)$

الحل

معنى أن ل(ر) تتناسب مع ر أي ل(١٠) = ١٠ م وهكذا

$$١ = م \cdot ١٠٠ + م \cdot ٧٠ + م \cdot ٢٠ + م \cdot ١٠$$

$$١ = م \cdot ٢٠٠$$

$$م = \frac{١}{٢٠٠}$$

ر	١٠	٢٠	٧٠	١٠٠
ل(ر)	$\frac{١٠}{٢٠٠}$	$\frac{٢٠}{٢٠٠}$	$\frac{٧٠}{٢٠٠}$	$\frac{١٠٠}{٢٠٠}$

يمكن كتابة القيم الاحتمالية في أبسط صورة

$$T(R) = ٧٧ = \frac{١٠}{٢٠٠} \times ١٠٠ + \frac{٢٠}{٢٠٠} \times ٧٠ + \frac{٧٠}{٢٠٠} \times ٢٠ + \frac{١٠}{٢٠٠} \times ١٠$$

$$E(R) = ٨٣١ = T(R) = \frac{١٠}{٢٠٠} \times ١٠٠ + \frac{٢٠}{٢٠٠} \times ٧٠ + \frac{٧٠}{٢٠٠} \times ٢٠ + \frac{١٠}{٢٠٠} \times ١٠$$

الصف الحادي عشر متقدم

Math Show

٣-٩ القيمة المتوقعة والتباين

(٥) رمي حجري نرد منتظمين وكان السغير العشوائي (س) هو المضاعف المشترك الأصغر بين العددين الظاهرين على حجر النرد

(أ) أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س)

(ب) أوجد ت(س)، ل(س) و ت(س)

(ج) احسب ع(س)

الحل



الرمية الاولى						الرمية الثانية
٦	٥	٤	٣	٢	١	
٦	٥	٤	٣	٢	١	
٦	١٠	٤	٦	٢	٢	
٦	١٥	١٢	٣	٦	٣	
١٢	٢٠	٤	١٢	٤	٤	
٣٠	٥	٢٠	١٥	١٠	٥	
٦	٣٠	١٢	٦	٦	٦	

ويكون جدول التوزيع الاحتمالي

س	١	٢	٣	٤	٥	٦	١٠	١٢	١٥	٢٠	٣٠
ل(س)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{7}{36}$

$$ت(س) = \frac{1}{36} \times 1 + \frac{2}{36} \times 2 + \frac{3}{36} \times 3 + \frac{5}{36} \times 4 + \frac{7}{36} \times 5 + \frac{9}{36} \times 6 + \frac{7}{36} \times 7 + \frac{4}{36} \times 10 + \frac{7}{36} \times 12 + \frac{7}{36} \times 15 + \frac{7}{36} \times 20 + \frac{7}{36} \times 30$$

$$ت(س) = 8\frac{5}{12}$$

$$ل(س) < ت(س) = ل(س=10) + ل(س=12) + ل(س=15) + ل(س=20) + ل(س=30)$$

$$ل(س) < ت(س) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{7}{36} = \frac{17}{36}$$

$$ع(س) = \frac{1}{36} \times 1 + \frac{2}{36} \times 2 + \frac{3}{36} \times 3 + \frac{5}{36} \times 4 + \frac{7}{36} \times 5 + \frac{9}{36} \times 6 + \frac{7}{36} \times 7 + \frac{4}{36} \times 10 + \frac{7}{36} \times 12 + \frac{7}{36} \times 15 + \frac{7}{36} \times 20 + \frac{7}{36} \times 30$$

$$ع(س) = 8\frac{5}{12} = 8\frac{5}{12} - \frac{17}{36} \times 30 = 49\frac{1}{4}$$

الصف الحادي عشر متقدم

Math Show

٣-٩ القيمة المتوقعة والتباين

(٦) اختير طالبان عشوائياً من صف جامعي يتألف من ١٢ طالبة و ١٨ طالباً،

(أ) أوجد القيمة المتوقعة لعدد الطالبات، والقيمة المتوقعة لعدد الطلاب.

(ب) اكتب نسبة القيمة المتوقعة لعدد الطالبات إلى القيمة المتوقعة لعدد الطلبة في أبسط صورة. ماذا تلاحظ على هذه النسبة.

(ج) احسب التباين لعدد الطالبات المختارات



الحل

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الذي يمثل عدد الطلاب (و)

$$\begin{aligned} \text{ل (و = ٠)} &= \frac{\binom{12}{2} \times \binom{18}{0}}{\binom{30}{2}} = \frac{22}{145} \\ \text{ل (و = ١)} &= \frac{\binom{12}{1} \times \binom{18}{1}}{\binom{30}{2}} = \frac{72}{145} \\ \text{ل (و = ٢)} &= \frac{\binom{12}{0} \times \binom{18}{2}}{\binom{30}{2}} = \frac{51}{145} \end{aligned}$$

ويكون جدول التوزيع الاحتمالي

٢	١	٠	و
$\frac{51}{145}$	$\frac{72}{145}$	$\frac{22}{145}$	ل (و)

$$\text{ت (و)} = 0 \times \frac{22}{145} + 1 \times \frac{72}{145} + 2 \times \frac{51}{145} = 1,2$$

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الذي يمثل عدد الطالبات (ب)

$$\begin{aligned} \text{ل (ب = ٠)} &= \frac{\binom{12}{2} \times \binom{18}{0}}{\binom{30}{2}} = \frac{22}{145} \\ \text{ل (ب = ١)} &= \frac{\binom{12}{1} \times \binom{18}{1}}{\binom{30}{2}} = \frac{72}{145} \\ \text{ل (ب = ٢)} &= \frac{\binom{12}{0} \times \binom{18}{2}}{\binom{30}{2}} = \frac{51}{145} \end{aligned}$$

ويكون جدول التوزيع الاحتمالي

٢	١	٠	ب
$\frac{22}{145}$	$\frac{72}{145}$	$\frac{51}{145}$	ل (ب)

$$\text{ت (ب)} = 0 \times \frac{22}{145} + 1 \times \frac{72}{145} + 2 \times \frac{51}{145} = 0,8$$

تلاحظ أن النسبة بين عدد الطلاب إلى عدد الطالبات = النسبة بين القيمة المتوقعة لعدد الطلاب إلى القيمة المتوقعة لعدد الطالبات

$$\text{ع (ب)} = 0 \times \frac{22}{145} + 1 \times \frac{72}{145} + 2 \times \frac{51}{145} - (0,8)^2 = 0,463$$

الصف الحادي عشر متقدم

Math Show

٣-٩ القيمة المتوقعة والتباين

(٧) تحتوي سلة على ٨ بكرات قطن: ٤ منها خُضر، و ٣ حُمر، وواحدة صفراء. اختيرت ٣ بكرات قطن عشوائيًا من السلة

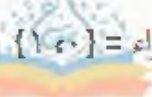
(أ) يَبين أن القيمة المتوقعة للبكرة الصفراء هي ٠,٣٧٥.

(ب) أوجد القيمة المتوقعة لعدد البكرات الحُمر

(ج) أوجد القيمة المتوقعة لعدد البكرات الخُضر

الحل

سلطنة عمان
التعليمية



عند اختيار ٣ بكرات فإن قيم المتغير العشوائي (ص) الذي يمثل عدد البكرات الصفراء $\{0, 1\}$

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الذي يمثل عدد البكرات الصفراء (ص)

$$P(V=1) = \frac{\binom{3}{1} \times \binom{5}{2}}{\binom{8}{3}} = 0,375$$

$$P(V=0) = \frac{\binom{3}{0} \times \binom{5}{3}}{\binom{8}{3}} = 0,125$$

ويكون جدول التوزيع الاحتمالي

ص	٠	١
ل(و)	٠,١٢٥	٠,٣٧٥

$$E(V) = 0 \times 0,125 + 1 \times 0,375 = 0,375$$

الاحتمالي للمتغير العشوائي الذي يمثل عدد البكرات الحُمر (ح)

$$P(H=0) = \frac{\binom{3}{0} \times \binom{5}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{1}{56}$$

$$P(H=1) = \frac{\binom{3}{1} \times \binom{5}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{15}{56}$$

$$P(H=2) = \frac{\binom{3}{2} \times \binom{5}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{15}{56}$$

$$P(H=3) = \frac{\binom{3}{3} \times \binom{5}{0}}{\binom{8}{3}} = \frac{1}{56}$$

ويكون جدول التوزيع الاحتمالي

ح	٠	١	٢	٣
ل(ح)	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

$$E(H) = 0 \times \frac{1}{56} + 1 \times \frac{15}{56} + 2 \times \frac{15}{56} + 3 \times \frac{1}{56} = 1,125$$

وبنفس الطريقة يمكنك حساب القيمة المتوقعة لعدد البكرات الخُضر

الصف الحادي عشر متقدم

Math Show

٣-٩ القيمة المتوقعة والتباين

(٨) رُبي حجر نرد، إذا ظهر على وجه حجر النرد عدد فردي يحصل اللاعب على درجة (س) تساوي ذلك العدد، وإذا ظهر عدد زوجي يُعيد اللاعب ربي حجر النرد:

-إذا ظهر عدد فردي في الرمية الثانية يحصل اللاعب على درجة تساوي ذلك العدد.

-إذا ظهر في الرمية الثانية عدد زوجي يحصل اللاعب على درجة تساوي نصف ذلك العدد الزوجي.

(أ) سجّل قيم (س) الممكنة وأنشئ جدول التوزيع الاحتمالي له.

(ب) أوجد ل(س) و ت(س).

(ج) احسب قيمة E^2 (س).



الحل

الرمية الاولى						الرمية الثانية
٦	٥	٤	٣	٢	١	
١	٥	١	٣	١	١	
١	٥	١	٣	١	١	
٣	٥	٣	٣	٣	١	
٢	٥	٢	٣	٢	١	
٥	٥	٥	٣	٥	١	
٣	٥	٣	٣	٣	١	

ويكون جدول التوزيع الاحتمالي

٥	٣	٢	١	س
$\frac{9}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{12}{36}$	ل(س)

$$ت(س) = 1 \times \frac{12}{36} + 2 \times \frac{3}{36} + 3 \times \frac{12}{36} + 5 \times \frac{9}{36} = 2,75$$

$$ل(س < 2,75) = ل(س = 3) + ل(س = 5)$$

$$ل(س < 2,75) = \frac{12}{36} + \frac{9}{36} = \frac{21}{36}$$

$$E^2(س) = 1^2 \times \frac{12}{36} + 2^2 \times \frac{3}{36} + 3^2 \times \frac{12}{36} + 5^2 \times \frac{9}{36} = 2\frac{17}{18}$$